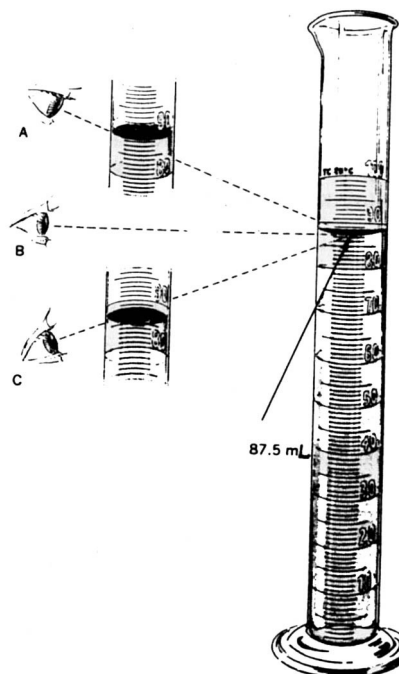


5ο Μάθημα

ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΥ

Μετρούμε αλλά και υπολογίζουμε

Στο προηγούμενο μάθημα χρησιμοποιήσαμε το μέτρο, αλλά και άλλα όργανα με τα οποία μετρούμε το μήκος. Το σχήμα που μετρούμε με το μέτρο ή με μια κλωστή είναι μια γραμμή, ευθεία, τεθλασμένη ή και καμπύλη. Το αποτέλεσμα εκφράζεται με έναν αριθμό που συνοδεύεται με τη μονάδα μετρήσεως, π.χ. 5 m. Ξέρουμε όμως ότι υπάρχουν και άλλα γεωμετρικά σχήματα, π.χ. ένα ορθογώνιο, που δεν μπορούμε να τα περιγράψουμε με έναν αριθμό σε μέτρα, αλλά πρέπει είτε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μονάδα μετρήσεως είτε να τα περιγράψουμε με περισσότερους αριθμούς σε μέτρα, π.χ. το ορθογώνιο με μέτρηση του μήκους και του πλάτους του. Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση και τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου διαφόρων σχημάτων ή αντικειμένων.



Σωστός τρόπος (ο Β) παρατήρησης για τη μέτρηση του όγκου υγρού με ογκομετρικό κύλινδρο.

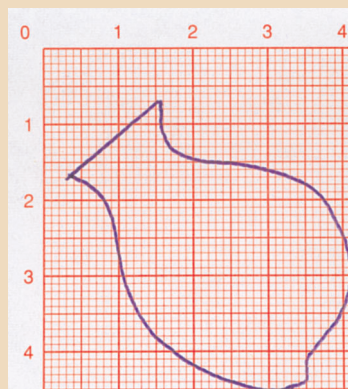
Μέτρηση επιφανείας

Είναι δύσκολο να ορίσουμε την επιφάνεια ενός αντικειμένου. Θα μπορούσαμε όμως να αισθανθούμε την **επιφάνεια** ως εκείνο που ακουμπάμε με την παλάμη μας ή στο πρόσωπό μας π.χ. σε ένα φύλλο χαρτί ή σε ένα μήλο. Διακρίνουμε βέβαια τις επιφάνειες σε *επίπεδες επιφάνειες* (η επιφάνεια του χαρτιού) και σε *καμπύλες επιφάνειες* (η επιφάνεια του μήλου). Για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός αντικειμένου, χρειαζόμαστε προφανώς μια μονάδα μετρήσεως. Γι' αυτό διαλέγουμε ένα απλό επίπεδο γεωμετρικό σχήμα, ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m, που το ονομάζουμε **τετραγωνικό μέτρο** και το συμβολίζουμε με 1 m^2 . Άλλες μονάδες επιφανείας που χρησιμοποιούμε για μικρές επιφάνειες είναι το τετραγωνικό εκατοστό (1 cm^2), και το τετραγωνικό χιλιοστό (1 mm^2), ενώ για μεγάλες επιφάνειες χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό μέτρο και για πολύ μεγάλες επιφάνειες το στρέμμα ($1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$) και το τετραγωνικό χιλιόμετρο (1 km^2).

Άσκηση 1

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μονάδες, είναι απλή μεν, αλλά συνήθως επίπονη εργασία να μετρήσουμε μια επιφάνεια. Έτσι, με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού, που είναι υποδιαιρεμένο σε τετραγωνικά χιλιοστά και σε τετραγωνικά εκατοστά, μπορούμε να μετρήσουμε την επιφάνεια του διπλανού σχήματος.

Να υπολογίσεις χονδρικά με τον τρόπο αυτό το εμβαδό του σχήματος σε τετραγωνικά χιλιοστά και σε τετραγωνικά εκατοστά mm²

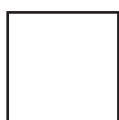


Τη μετρημένη επιφάνεια ενός σχήματος την ονομάζουμε και **εμβαδό** του σχήματος.

Υπολογισμός του εμβαδού κανονικών γεωμετρικών σχημάτων

Στην περίπτωση κανονικών γεωμετρικών σχημάτων, π.χ. τετραγώνου, ορθογωνίου, τριγώνου, κύκλου, τραπεζίου, μπορούμε να χρησιμοποιούμε ορισμένα μεγέθη μήκους των σχημάτων αυτών και να υπολογίζουμε το εμβαδό με τη βοήθεια κατάλληλων μαθηματικών τύπων που έχουμε μάθει στα μαθηματικά.

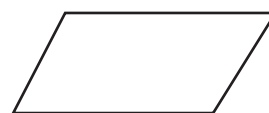
Ξέρουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου (ορθογώνιου ή μη), πολλαπλασιάζοντας το μήκος της βάσης του επί το ύψος του.



Τετράγωνο



Ορθογώνιο

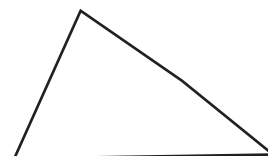


Παραλληλόγραμμο

Εμβαδό παραλληλογράμμου = βάση x ύψος

- Για να βρούμε το εμβαδό ενός τριγώνου, πολλαπλασιάζουμε τη βάση επί το ύψος και το αποτέλεσμα το διαιρούμε διά δύο.

Εμβαδό τριγώνου = (βάση x ύψος) / 2

**Άσκηση 2**

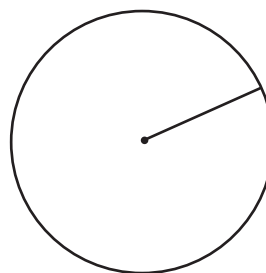
Σε καθένα από τα παραπάνω γεωμετρικά σχήματα, να σημειώσεις μια βάση και το αντίστοιχο ύψος.

Άσκηση 3

Να χωρίσεις το ακανόνιστο σχήμα της Άσκησης 1 σε κανονικά σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμο, τρίγωνα*) και να υπολογίσεις τα εμβαδά όλων αυτών με τους μαθηματικούς τύπους και από αυτά το εμβαδό του συνολικού σχήματος. Να συγκρίνεις το αποτέλεσμα με αυτό που βρήκες μετρώντας την επιφάνεια με τετραγωνισμένο χαρτί

* Μερικά τρίγωνα δεν θα είναι ακριβώς τρίγωνα, αλλά κατά προσέγγιση.

- Για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός κύκλου (ενός κυκλικού δίσκου), πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα επί τον εαυτό της και το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε επί τον αριθμό $\pi = 3,14$ (ο αριθμός αυτός λέγεται αριθμός του Αρχιμήδη).



$$\text{εμβαδό κύκλου} = 3,14 \times \text{ακτίνα} \times \text{ακτίνα}$$

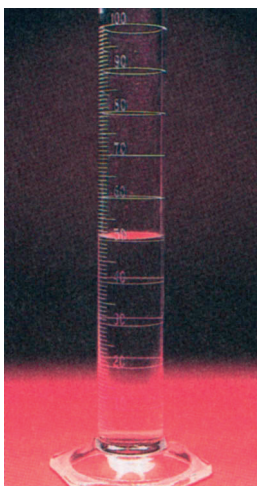
Μέτρηση του όγκου υγρών

- Σε τι μονάδες μετρούν στα πρατήρια βενζίνης, τη βενζίνη που βάζουν στα αυτοκίνητα;

.....

Θα έχεις ίσως δει στο σπίτι σου να μετρούν μια ορισμένη ποσότητα νερού ή γάλακτος ή λαδιού που πρέπει να προστεθεί σύμφωνα με κάποια συνταγή ενός φαγητού ή γλυκού.

- Πώς λοιπόν μπορούμε να μετρήσουμε τον όγκο των υγρών;



Για να μετρήσουμε τον όγκο υγρών σωμάτων, τα ρίχνουμε μέσα σε δοχεία που έχουν γνωστό όγκο (π.χ σε μπουκάλια νερού ή αναψυκτικού) ή σε δοχεία που φέρουν υποδιαίρεσεις κατάλληλες για τη μέτρηση του όγκου. Τέτοια ογκομετρικά δοχεία είναι ο **ογκομετρικός κύλινδρος** που υπάρχει στο σχολικό εργαστήριο, το μπιμπερό κ.ά. Ως μονάδα όγκου των υγρών χρησιμοποιείται συνήθως το **λίτρο** (litre) που συμβολίζεται με 1 l (μικρό ελ λατινικό) ή με 1 L, και είναι ίσο με 1000 cm³. Συνήθως χρησιμοποιείται και η υποδιαίρεση ένα χιλιοστό του ενός λίτρου, που ονομάζεται **χιλιοστόλιτρο** (ή मिलीλιτρο) και συμβολίζεται με 1 ml ή 1 mL .

- Να συμπληρώσεις τις παρακάτω σχέσεις:

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας ένα κουτάκι που περιέχει αναψυκτικό, να επιβεβαιώσετε αν ο όγκος του αναψυκτικού που αναγράφεται στη συσκευασία του είναι σωστός.

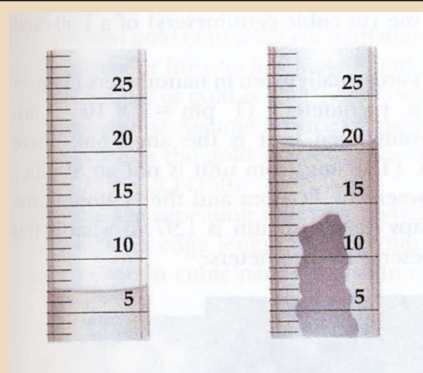
Τα ογκομετρικά δοχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης και για τη μέτρηση του όγκου στερεών σωμάτων, όταν αυτά έχουν ακανόνιστο σχήμα και επομένως δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός του όγκου τους με μετρήσεις ακμών. Αυτό γίνεται στην άσκηση 5.

Μέτρηση του όγκου στερεών σωμάτων

Άσκηση 5

Στο σχήμα, δεξιά δείχνεται ένας ογκομετρικός κύλινδρος με ορισμένη ποσότητα νερού. Δεξιά, έχουμε βυθίσει μέσα στο υγρό ένα στερεό σώμα με ακανόνιστο σχήμα, π.χ. μια πέτρα. Μπορείς να βρεις ποιος είναι ο όγκος της πέτρας; [Οι υποδιαίρεσεις (οι γραμμές) στον κύλινδρο δείχνουν κυβικά εκατοστά.]

.....

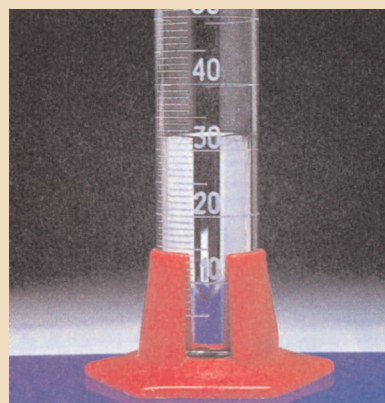


Άσκηση 6

Μέσα στον κύλινδρο με το νερό, προσθέτουμε 50 όμοια μικρά σφαιρίδια από μόλυβδο, οπότε παρατηρούμε ότι η στάθμη του νερού ανεβαίνει στα 42 mL.

• Μπορείς να βρεις τον όγκο του καθενός σφαιριδίου;

.....
.....
.....
.....



Από το παραπάνω είναι φανερό ότι:

• Μπορούμε να μετρήσουμε τον όγκο ενός στερεού σχήματος, μετρώντας τον όγκο ενός υγρού που

.....
.....
.....

Αν το στερεό έχει όμως κανονικό γεωμετρικό σχήμα, π.χ. κύβου, ορθογωνίου στερεού, παραλληλεπίπεδου, πυραμίδας, κυλίνδρου, σφαίρας, μπορούμε να χρησιμοποιούμε ορισμένα μεγέθη μήκους των σχημάτων αυτών και να υπολογίζουμε τον όγκο τους με τη βοήθεια κατάλληλων μαθηματικών τύπων που μαθαίνουμε στα Μαθηματικά.

Υπολογισμός του όγκου κανονικών γεωμετρικών στερεών

Τα πιο απλά σχήματα στον υπολογισμό του όγκου είναι τα παραλληλεπίπεδα και οι κύλινδροι. Ο όγκος τους υπολογίζεται, αν πολλαπλασιάσουμε το εμβαδό της βάσης τους επί το ύψος τους. Πιο πολύπλοκος αλλά όχι δύσκολος είναι και ο υπολογισμός του όγκου μιας σφαίρας.

Όγκος παραλληλεπίπεδου = εμβαδό βάσης x ύψος

Όγκος κυλίνδρου = εμβαδό βάσης x ύψος

Όγκος σφαίρας = $(4/3) \times 3,14 \times$ ακτίνα x ακτίνα x ακτίνα

Μονάδα όγκου είναι το **κυβικό μέτρο** (1 m^3) και οι υποδιαιρέσεις του: το **κυβικό δεκατόμετρο** (1 dm^3), το **κυβικό εκατοστόμετρο** (1 cm^3) και το **κυβικό χιλιοστό** (1 mm^3)

Άσκηση 7

Να υπολογίσεις τον όγκο του βιβλίου σου:

.....

Να βρεις τον όγκο ενός μικρού κυλινδρικού σώματος με δύο τρόπους, α) με πειραματικό προσδιορισμό, β) με υπολογισμό. Να συγκρίνεις τις δύο τιμές.

.....

.....

.....

Άσκηση 8

Σχέσεις ανάμεσα στις μονάδες μήκους, επιφανείας και όγκου

Να συμπληρώσεις τα κενά: $1 \text{ m} = \dots\dots\dots \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ mm}$

$1 \text{ m}^2 = (100 \text{ cm}) (100 \text{ cm}) = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$

$1 \text{ cm}^2 = (10 \text{ mm}) (10 \text{ mm}) = \dots\dots\dots \text{ mm}^2$

$1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm}) (100 \text{ cm}) (100 \text{ cm}) = \dots\dots\dots \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{ L}$

$1 \text{ L} = \dots\dots\dots \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{ mL}$ ($1 \text{ mL} : 1 \text{ χιλιοστόλιτρο}$).

$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{ mm}^3$

Ερώτηση

Να σκεφθείς πώς θα μπορούσες να υπολογίσεις πόσοι περίπου κόκκοι καλαμποκιού περιέχονται μέσα σ' ένα κυλινδρικό βαρέλι, μετρώντας τον αριθμό των κόκκων καλαμποκιού που χωράνε μέσα σ' ένα κυλινδρικό ποτηράκι.

.....

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Μπορείς να αναφέρεις ένα παράδειγμα μιας επίπεδης και ένα παράδειγμα μιας καμπύλης επιφάνειας;
2. Ποια είναι η μονάδα μετρήσεως της επιφάνειας;
3. Ποιες άλλες μονάδες επιφανείας γνωρίζεις;
4. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό μιας μη κανονικής επιφάνειας;
5. Πώς υπολογίζουμε το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου, ενός τριγώνου και ενός κύκλου;
6. Ποια η μονάδα μετρήσεως του όγκου;
7. Ποιες άλλες μονάδες όγκου γνωρίζεις;
8. Πώς μετρούμε τον όγκο των υγρών;
9. Πώς μπορούμε να μετρήσουμε έμμεσα τον όγκο ενός στερεού σώματος με ακανόνιστο σχήμα;
10. Πώς υπολογίζουμε τον όγκο ενός παραλληλεπίπεδου και ενός κυλίνδρου;

Θέμα για προαιρετική μελέτη:

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΕ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ

Πόσα ψηφία να κρατούμε όταν κάνουμε αριθμητικές πράξεις;

Μέτρησε με τον κανόνα σου τα μήκη των πλευρών του παρακάτω ορθογωνίου με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια μπορείς. Στη συνέχεια, να υπολογίσεις από τα μήκη αυτά το εμβαδό του ορθογωνίου και να το σημειώσεις:



Εμβαδό = cm^2

Να σημειώσεις και τις τιμές για το ίδιο εμβαδό αρκετών άλλων συμμαθητών σου.

- α) cm^2 β) cm^2 γ) cm^2 δ) cm^2
 ε) cm^2 στ) cm^2 ζ) cm^2 η) cm^2

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του εμβαδού κυμαίνονται από..... cm^2 μέχρι cm^2 .

- Έχει σημασία να γράφουμε όλα τα ψηφία που μας έδωσε ο αριθμητικός υπολογισμός;
π.χ. cm^2 ;

Είναι φανερό από το παραπάνω παράδειγμα ότι είναι περιττό να γράψουμε όλα τα δεκαδικά ψηφία που δίνει ένας μεμονωμένος υπολογισμός. Αρκεί να δώσουμε το αποτέλεσμα όχι ως cm^2 αλλά ως cm^2 .

Έτσι δείχνουμε όλα τα ψηφία για τα οποία είμαστε σίγουροι συν το πρώτο ψηφίο για το οποίο δεν είμαστε σίγουροι, μόνο δηλαδή τα **σημαντικά ψηφία**.

Θα βρούμε τώρα μερικούς απλούς κανόνες που θα μας βοηθούν να προσδιορίζουμε τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων σε *αποτέλεσμα από υπολογισμό*.

α. Πολλαπλασιασμός

$$\begin{array}{r} 167,8 \\ \times 0,032 \\ \hline 3356 \\ 5034 \\ \hline 5,3696 \Rightarrow 5,4 \end{array}$$

Τα αβέβαια ψηφία δείχνονται έντονα. Είναι φανερό ότι ισχύουν οι εξής κανόνες:

$$\begin{aligned} \text{βέβαιο} \times \text{βέβαιο} &= \text{βέβαιο}, \\ \text{αβέβαιο} \times \text{βέβαιο} &= \text{αβέβαιο}, \\ \text{αβέβαιο} \times \text{αβέβαιο} &= \text{αβέβαιο}, \end{aligned}$$

και όμοια για τις άλλες αριθμητικές πράξεις.

Να έχεις υπόψη σου

Μηδενικά που υπάρχουν στην αρχή ενός αριθμού, δεν είναι σημαντικά ψηφία. Έτσι, ο αριθμός 0,0000057 έχει δύο μόνο σημαντικά ψηφία. Τα μηδενικά όμως στη μέση ή στο τέλος είναι σημαντικά: Ο αριθμός 30,005 έχει πέντε σημαντικά ψηφία. Ο αριθμός 28,30 έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία.

Πόσα σημαντικά ψηφία έχει ο πολλαπλασιαστής και πόσα ο πολλαπλασιαστέος;

Πόσα σημαντικά ψηφία έχει το αποτέλεσμα (το γινόμενο;)

⇒

β. Διαίρεση

Από τον προηγούμενο πολλαπλασιασμό έχουμε $5,4 : 167,8 = 0,0321811 \Rightarrow 0,032$. Γενικά, επειδή η διαίρεση είναι αντίστροφος πολλαπλασιασμός, ισχύει ο ίδιος κανόνας, ήτοι το πηλίκο έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα είναι τα σημαντικά ψηφία όποιου από τον διαιρετέο ή τον διαιρέτη έχει τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.

γ. Πρόσθεση και αφαίρεση

$$\begin{array}{r} 124,25 \\ + 0,4678 \\ \hline 124,7178 \Rightarrow 124,72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 124,25 \\ - 0,4678 \\ \hline 123,7822 \Rightarrow 123,78 \end{array}$$

Εδώ ο κανόνας είναι ότι το αποτέλεσμα έχει τόσα δεκαδικά σημαντικά ψηφία, όσα είναι τα σημαντικά δεκαδικά ψηφία του όρου με τα λιγότερα σημαντικά δεκαδικά ψηφία:



Παρατηρούμε ότι:

• Το αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα είναι τα σημαντικά ψηφία του παράγοντα με τα σημαντικά ψηφία.

Αυτό είναι ένας γενικός κανόνας που ισχύει τις περισσότερες φορές (συναντάμε όμως και εξαιρέσεις).

Πώς στρογγυλεύουμε τους αριθμούς

- Ο αριθμός 38,13 αν στρογγυλευθεί σε τρία ψηφία, θα γίνει 38,1.
- Ο αριθμός 189,28 αν στρογγυλευθεί σε τέσσερα ψηφία, θα γίνει 189,3.
- Ο αριθμός 189,284 αν στρογγυλευθεί σε πέντε ψηφία, θα γίνει 189,28.
- Ο αριθμός 189,284 αν στρογγυλευθεί σε τρία ψηφία, θα γίνει 189.
- Ο αριθμός 189,684 αν στρογγυλευθεί σε τρία ψηφία, θα γίνει 190.

Τέλος, όταν πρέπει να διώξουμε το 5 (ή το 50, ή το 500 κ.λπ.), τότε συμφωνούμε να μεγαλώνουμε κατά μία μονάδα το τελευταίο ψηφίο που θα κρατήσουμε αν αυτό είναι μονό ψηφίο, ενώ αν αυτό είναι ζυγό ψηφίο, δεν το αλλάζουμε. Έτσι, ο αριθμός 189,15 στρογγυλεύεται σε 189,2, αλλά και ο αριθμός 189,25 γίνεται επίσης 189,2.

Να έχεις υπόψη σου

Σημασία έχει να παρουσιάζουμε το τελικό αποτέλεσμα με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Όταν όμως κάνουμε όχι μία αλλά πολλές πράξεις, τότε στις ενδιάμεσες πράξεις δεν πειράζει, και μάλιστα είναι καλύτερο, να κρατάμε περισσότερα ψηφία και όχι μόνον τα σημαντικά. Το τελευταίο οφείλεται στο ότι μπορεί κατά τύχη οι στρογγυλεύσεις που θα κάναμε στις ενδιάμεσες πράξεις να είναι περισσότερες προς μια πλευρά κι έτσι να συσσωρεύεται σφάλμα στρογγυλεύσεως.